Romseminar 2004: Eingebildete Zahlen

Cordian Riener

Einführung

In meinem Beitrag zum diesjährigen Romthema möchte ich mich mit Zahlen auseinandersetzen. Der Zusatz *„eingebildet"* deutet schon darauf hin, dass vor allem auch die komplexen Zahlen im Brennpunkt des Interesses stehen werden, doch er soll auch auf die Schwierigkeit deuten, welche Existenz man mathematischen Objekten zuweisen kann. So ist zwar jedem von uns intuitiv klar, was wir darunter verstehen, wenn wir von Zahlen reden, aber dennoch gibt es wohl keine wirklich befriedigende mathematische Definition für die Zahlen. So versucht der Vortrag zwei Aspekte der Wirklichkeit der Mathematik aufzugreifen. Auf der einen Seite einen innermathematischen, denn die Genesis des modernen Zahlenbegriffes, die hier anhand der Entwicklung der komplexen Zahlen aufgezeigt werden soll, spiegelt meiner Meinung nach ein Stück weit auch die Geschichte der modernen Mathematik wider. Auf der anderen Seite außermathematisch, denn wohl keine anderen Objekte des Alltags sind für viele Menschen so klar mit der Mathematik verknüpft, wie die Zahlen.

Zahlen gehören zu den ersten Dingen, die wir in unserem Leben erfahren; wir lernen, dass wir mehrere Bauklötze im Baukasten haben, dass es aber vielleicht mehr rote denn blaue von ihnen gibt und irgendwann werden wir dann in das Geheimnis des Abzählens eingeführt. Meistens lernen Kinder, Zahlen als eine Reihe von Zahlwörtern, die in einer bestimmten Reihenfolge nacheinander folgen. Ist diese Wortreihe einmal bis Zehn verstanden, werden die Zahlen meisten mit den Fingern verdeutlicht und erhalten somit ihre erste konkrete Form. Mit Hilfe dieser Konkreten Vorstellung von Zahlen sind wir dann in der Lage, einer Menge von Objekten, wie zum Beispiel den blauen Bauklötzen, eine Zahl zuzuordnen, indem wir einfach mit den Fingern abzählen. Auch wenn diese Methode des Abzählen nun heute für uns, nachdem wir diese Vorstellung von Zahlen hinter uns gelassen haben, sehr kindlich und naiv anmutet, trifft sie sich formal gesehen auch wieder in der Cantorschen Mächtigkeitsdefinition für Mengen, denn das Abzählen kann abstrakt auch als eine Bijektive Abbildung der Menge der Bauklötze auf die Menge der Finger gedeutet werden.

Nachdem wir dann die leichten Tage des Kindergartens hinter uns gelassen habe und die Bauklötze gegen Füller und Rechenheft eingetauscht wurden, erlangen wir in der ersten Klasse eine neue Vorstellung dessen, was Zahlen sein können: wir lernen uns die Zahlen an einer Gerade geordnet vorzustellen. Damit lernen wir zum ersten Mal, die Zahlen von einer konkreten plastischen Vorstellung zu lösen und uns wird dadurch auch die potentielle Unendlichkeit der natürlichen Zahlen bewußt: Während bisher das Zählen immer durch die Endlichkeit der als Repräsentant benutzten Menge beschränkt war, sind wir nun in der Lage uns den Zählprozess unendlich lange vorzustellen.

Ihre nächste Erweiterung findet unsere Zahlenvorstellung dann, wenn der Zahlenstrahl nicht mehr bei Null begonnen wird, sondern nun auch nach links hin unbegrenzt bleibt: Die negativen Zahlen. Hier kommen in uns auch kurzzeitig jene Bedenken auf, die auch schon die Mathematiker der Renaissance hatten, wenn sie ich über die Existenz von negativen Zahlen Gedanken machten: Kann denn etwas kleiner als null sein? Aber unser Erfahrungsreichtum reicht dann meistens schon soweit aus, auch für die negativen Zahlen Beispiele aus unserem Alltag zu finden, so hat nämlich bis dorthin fast jeder schon eine Vorstellung von dem was Schulden sind und mit solchen Beispielen als Rüstzeug, scheint uns das beherrschen des Rechnens mit negativen Zahlen auch kein Problem mehr. Gleichzeitig machen wir aber auch eine wichtige Erfahrung: bei manchen Aufgaben erscheint es absolut sinnlos negative zahlen als Lösungen zuzulassen. So macht ein negatives Volumen eines Würfels zumindestens scheinbar keinen Sinn, und es wird uns klar, dass eine bestimmte Aufgabenstellung nur eine bestimmte Klasse von Lösungen zuläßt.

Irgendwann werden dann auch die Zwischenräume des Zahlenstrahls durch die Bruchzahlen aufgefüllt und da diese uns meistens auch schon aus dem Alltag - sei es von Uhrzeiten oder den zu teilenden Geburtstagskuchen - bekannt sind, stellt auch diese Erweiterung des Zahlenbegriffes für uns kein wirkliches Problem dar. Die ersten Schwierigkeiten tauchen erst auf, wenn uns der Lehrer weismachen will, dass der doch scheinbar lückenlos anmutende Zahlenstrahl Löcher enthält. Zum Beweis führt er uns vor, dass $\sqrt{2}$ nicht als Bruch dargestellt werden kann, obgleich sie mittels der Diagonalen eines Einheitsquadrates mit dem Zirkel auf den Zahlenstrahl abgetragen werden kann. Diese Erkenntnis scheint dem meisten zwar verwunderlich, da aber ja diese irrationale Zahl eindeutig ihren Platz auf dem Zahlenstrahl zu haben scheint, wird dieses Ergebnis scheinbar problemlos anerkannt - auch wenn es wie ein pathologischer Einzelfall scheint, denn dass der irrationalen Zahlen bei Weitem mehr sind als der rationalen scheint uns damals nicht vorstellbar.

Doch wenn dann mal die quadratischen Gleichungen besprochen werden, zu deren Lösung man die Mitternachtsformel ($\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$) erlernt, stellt sich zwangsläufig auch die Frage, was passiert, wenn die Determinante einen Wert kleiner Null aufweist. Unserer Anschauung scheint dieser Fall ganz klar: so etwas kann es nicht geben, denn eine Parabel hat einfach keine Nullstellen, wenn sich der Scheitel oberhalb der x-Achse befindet. Und trotzdem erhaschen wir meist aus beiläufigen Bemerkungen der Lehrer, dass es solche imaginären, eingebildeten Zahlen zu geben scheint... Aber wie weit sind diese Zahlen wirklich imaginär oder mehr eingebildet als andere Zahlen, die sich bisher so gut in unserer Vorstellung eingeprägt hatten? In dem hier kurz skizzierten Prozeß des mathematischen socialising, den ich versucht habe aus meiner eigenen Erinnerung zu skizzieren, haben wir letztlich einen Prozess durchlaufen, der in Beziehung zu setzen ist mit der Entwicklung der Mathematik; nur dass wir diesen Prozess, der nun schon mehrere tausend Jahre verlief eben in kürzerer Zeit durchlaufen haben und uns gewisse Bilder eben schon von außen geliefert wurden. Wenn also nun die Geschichte der komplexen Zahlen im Italien des 16. Jhd. beginnt, sollte zuerst bedacht werden, welche Vorstellung damals den Zahlen innewohnte um danach davon ausgehend zu sehen, wie sich die komplexen Zahlen immer mehr zu einer mathematischen Realität hin entwickelten.

Lösungsformeln für polynomiale Gleichungen

Bereits den alten Babyloniern war die Lösungsformel für die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ bekannt. Doch erst die Mathematiker der italienischen Renaissance waren in der Lage kubische Gleichungen zu lösen. Ein Name der heute noch untrennbar mit der Lösung dieses Problems verbunden wird, ist der des italienischen Mathematikers und Arztes Girolamo Cardano. Dieser hatte die Lösungsformel für kubische Gleichungen der Form $x^3 = px+q$ 1539 von Niccolo Tartaglia in einer metaphorisch verschlüsselten Form erfahren, konnte sie nachvollziehen und musste einen Eid leisten, diese Formel

nicht weiterzugeben. Diese mathematische Geheimniskrämerei scheint uns heute sicherlich unverständlich - in der Tat war die Formel wohl schon gut 30 Jahre zuvor vom bologneser Mathematiker Scipione del Ferro entdeckt worden - doch für del Ferro und Tartaglia bedeutete sie Exclusivität und da sie von ihrerer mathematischen Kunst ihren Lebensunterhalt bestreiten mußten, war Tartaglia natürlich nicht sehr erfreut, als Cardano 1545 die Formel in seiner „Ars magna"veröffentlichte.
Wie kam Cardano nun aber auf diese Lösungsformel? Die Vorstellung, die den Zahlen zu jener Zeit innewohnte, war geometrischer Natur: Also Zahlen waren Längen, Flächen und Volumen. Einer Gleichung der Form $x^2 = b$ entsprach also die Frage nach den Seitenlängen x eines Quadrates mit Flächeninhalt b. Wie kann aber eine Gleichung der Form $x^3 = px + q$ geometrischt interpretiert werden? Auf den ersten Blick hin scheint diese Gleichung geometrisch sinnlos, den auf der linken Seite steht das Volumen eines dreidimensionalen Würfels, währen die rechte Seite zu einer eindimensionale Strecke der Länge p die Zahl q addiert. Schreibt man die Gleichung jedoch in der Form $x^3 + (px * 1 * 1) = q$ sieht man leicht, dass mit diesem uns trivial anmutenden Trick, das Dimensionsproblem überwunden wird und das Problem läßt sich nun durch die folgende Figur verstehen, die das Gesamtvolumen q besitzen soll.

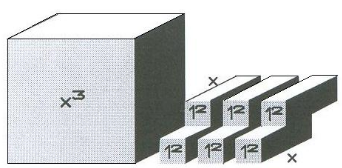

Abbildung 1: Erste einfache Möglichkeit

Da diese Form nun zwar anschaulich einfach, jedoch analytisch schwer zugänglich ist, müssen die einzelnen Elemente zu einer kompakteren Figur zusammengefasst werden, ohne das Volumen zu verändern. Eine Möglichkeit, die sich als zweckmäßig erweisen wird, ist duch die nachfolgende Abbildung angedeutet:

Diese Variante ist zweckmäßiger, denn sie ermöglicht nun eine äquivalente

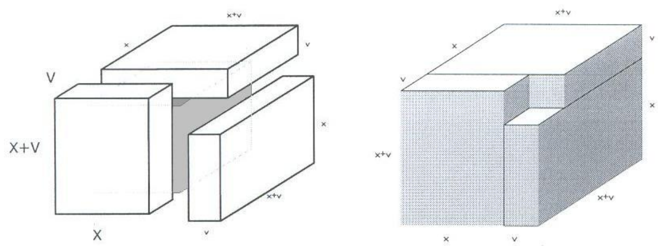

Abbildung 2: Auf diese Weise läßt sich das Volumen besser berechnen

mathematische Formulierung des Problems, denn vom großen Würfel mit Volumen $(x+v)^3$ wird einfach der kleine Würfel, dessen Volumen v^3 beträgt abgezogen, also:

$$(x+v)^3 - v^3 = q$$

wobei für u und v noch gelten muss:

$$3(x+v)v = p$$

setzen wir nun noch $u := x+v$ erhalten wir folgende Gleichung:

$$u^3 - v^3 + q = u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = 0 \text{ bzw. } u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

Auch wenn diese Gleichung noch kompliziert anmutet, ist sie nur eine quadratische Gleichung in u^3 und somit ist die Lösung gleich gefunden:

$$u_{1,2} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}$$

Aus dieser Form erhält man dann die berühmte Cordanische Formel:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}} \quad \text{wo } R := (\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3$$

Die Lösungformel von Cordano ist also durch geometrische Überlegungen leicht zu erhalten. Obwohl Cordano in seinem Werk manchmal schon mit negativen Zahlen rechnet und ihnen in gewissen Aufgaben (kaufmännischer Art) auch durchaus eine Zewckmäßigkeit zugesteht scheinen sie ihm hier in einem geometrischen Kontext eher sinnlos und daher auch Wurzeln aus negativen Zahlen. Wähernd es im quadratischen Fall ja auch noch völig Abwegig

schein, mit negativen Wurzeln in der Lösungsformel zu rechnen, tritt bei kubischen Gleichungen ein Phänomen auf, das im nächsten Abschnitt genauer beleuchtet wird.
Kurze Zeit nach CordanosVeröffentlichung der Auflösungsformel für kubische Gleichungen veröffentlichte Cordanos Schüler und Freund Lodovico Ferrari eine Auflösungsformel für Gleichungen 4. Grades. In den folgenden 3 Jahrhunderten versuchten Generationen von Mathematikern dann vergeblich neue Formeln für Gleichungen höheren Grades zu finden, aber erst Abel und Galois konnten die Unmöglichkeit dieser Aufgabe in den 20er Jahren des 19 Jahrhunderts zeigen.

Casus irreducibiles und die komplexen Zahlen

Um das Auftreten eines negativen R gänzlich auszuschließen, weißt Cordano im 12. Kapitel seiner Ars magna darauf hin, dass die Lösungformel versagen, wenn $\frac{p}{3}^3 > \frac{q}{2}^2$ und gibt als Beispiel die Gleichung $x^3 = 20x + 25$ an. Einen solchen Fall mit negativem R bezeichnet man als Casus irreducibiles". Betrachtet man die angegebene Gleichung jedoch genauer findet man aber z.B. durch bloßes Probieren die realeLösung $x = 5$. Doch dieser scheinbar unlösbare Fall stellt in Wirklichkeit den angenejmsten dar. Er tritt nämlich genau dann auf, wenn es drei reelle Nullstellen gibt. Dieses Dilemma wurde 1746 vom französischen Mathematiker Clairaut entdeckt.

Lemma (Clairaut 1746). Sei $p(x)$ ein qubisches Polynom der Form $f(x) = x^3 - px - q$ und R der zugehörige Radikant der Cordanischen Formel. Es gilt:

$$R < 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \text{ hat drei relle Nullstellen}$$

Beweis. Sei $f(x) = x^3 + px + q$. Damit drei reelle Nullstellen existieren, muss f an den beiden Extremstellen $x_1 = \sqrt{\frac{-p}{3}}$ und $x_2 = -\sqrt{\frac{-p}{3}}$ verschiedenes Vorzeichen haben. Also muss gelten: $0 > p(x_1)p(x_2) = (\sqrt{\frac{-p}{3}}^3 + p\sqrt{\frac{-p}{3}} + q)(-\sqrt{\frac{-p}{3}}^3 - p\sqrt{\frac{-p}{3}} + q) = -(\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}})^2 + q^2 = 4((\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2) = 4R$ □

Auch wenn dieses Einsicht in den Casus irredicibiles erst 200 Jahre nach Cordano möglich war, war doch den Algebraikern jener Zeit auch schon durchaus bewusst, dass reelle Lösungen vorhanden waren, auch wenn scheinbar die Auflösungsformel zu versagen schien. Schon 1572 tat Rafael Bombelli einen mutigen Schritt in seinem Buch L'Algebraünd löste die Gleichung:

$$x^3 = 15x + 4$$

in dem er mutig mit den Wurzeln aus negativen Zahlen aus der Cordanischen Formel weiter rechnete und erhielt:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$$

Um mit diesem Ausdruck weiter zurechnen fand er noch

$$\begin{array}{c} (2+\sqrt{-1})^3 = 8+12\sqrt{-1}-6-\sqrt{-1} = 2+11\sqrt{-1} \\ (2-\sqrt{-1})^3 = 8-12\sqrt{-1}-6+\sqrt{-1} = 2-11\sqrt{-1} \end{array}$$

und somit erhielt er die gesuchte Lösung $x = 4$, von deren Existenz er sich sicherlich zuvor schon durch Probieren überzeugt hatte. Durch diesen kühnen Schritt, waren nun also die komplexen Zahlen in die mathematische Welt geboren worden, oder viel mehr entdeckt. Doch schon die Titulierung dieser Zahlen als imaginäre Größen, also als etwas, das zwar vorstellbar, aber nicht wirklich existent scheint, zeigt die große Skepsis, die diesem Konstrukt entgegengebracht wurde.
So war für Newton beispielsweise eine komplexe Wurzel ein Indiz für die Unlösbarkeit eines Problems. Er schreibt dazu „But it is just that Roots of Equations should be impossible, least they should exhibit the cases of Problems that are impossible as if they were possible.“ [1] Leibniz nennt die imaginären Größen „eine feine Zuflucht des göttlichen Geistes, beinahe ein Zwitterwesen zwischen Sein und Nichtsein."[1] Und selbst Euler, der die komplexen Zahlen benutzte um mit ihnen die e-Funktion mit den trigonometrischen Funktionen zu verbinden, hatte starke Zweifel über deren „wirkliche“ Existenz. Er schreibt: „so ist klar, dass die Quadratwurzel von negativen Zahlen nicht einmahl unter die möglichen Zahlen können gerechnet werden: folglich müssen wir sagen, daß dieselben ohnmögliche Zahlen , welche ihrer Natur nach ohnmöglich sind, und gemeiniglich imaginäre Zahlen, oder eingebildete Zahlen genennt werden, weil sie bloss allein in der Einblidung stattfinden“[1]
Untrennbar mit der Einführung der komplexen Zahlen verbunden, ist der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra. Dieser scheint den komplexen Zahlen erst ihre Daseinsberechtigung zu geben. Vermutet wurde er zum ersten

Mal vom niederländischen Mathematiker Alber Girard. In seinem 1629 erschienenen Buch „L'Invention en l'algebre“ schreibt er, dass jedes Polynom n-ten Grades n Nullstellen besizt. Einen Beweis dafür liefert er allerdings nicht, sondern er begnügt sich damit, die Aussage anhand von Beispielen zu erläutern. An einem strengen Beweis dieses Sachverhaltes versuchen sich nun Generationen großer Mathematiker. Doch keiner dieser Beweise, obgleich sie von großen Mathematikern wie Euler oder Lagrange geführt worden waren, konnten der strengen Kritik eines gerade einmal 22 jährigen standhalten, der zurecht bemängelte, dass keiner der Beweise wirklich die Existenz der Nullstellen bewies, sondern nur unter der Annahme der Existenz, indem dann konkret gerechnet wurde, ihre Form. Der junge Mathematiker, der sich dergleichen mathematischer Hybris erdreistete, war kein geringerer als Carl Friedrich Gauss. Dieser benutz ein seinem Beweis 1799, der aus heutiger Sicht durchaus noch einige Lücken aufweis, etwas neues: Die Interprätation von komplexen Zahlen als Elemente einer Ebene. Mit dieser Vorstellung ausgerüstet führt er einen Beweis, indem er sich die Nullstellen als Schnittpunkte der beiden algebraischen Kurven $Re(f(z)) = 0$ und $Im(f(z)) = 0$ denkt. Auch wenn er im Weiteren topologische Sätze benutzt, die ihm evident erscheinen, jedoch heute nur auf sehr subtile Weise gezeigt werden, und es seinem ersten Beweis eigentlich auch an der Strenge mangelt, die er auch in den Beweisen seiner Vorgänger vermisst hat, erlangt die neue anschauliche Idee der komplexen Zahlen, durch ihn ihre mathematische Begründung und Popularität. Durch dieses anschauliche Modell verflog der Hauch des mataphysischen, der den komplexen Zahlen bis dahin innegewohnt hatte, doch recht schnell und sie fanden auch bald - ganz entgegen Newtons Vorstellung - Einzug in die Physik.

Quaternionen - Komplexer als Komplex?

Mit Hilfe der Interpretation von komplexen Zahlen als Zahlenebene, lassen sich Probleme der ebenen Geometrie in analytische Fragestellungen über komplexe Zahlen übersetzten und recht einfach zeigen. Der offensichtliche Vorteil dieser Methode veranlasste in den 40-er Jahren des 19. Jahrhunderts den irischen Physiker und Mathematiker Hamilton zur Überlegung, ob sich nicht diese Methode den zwei Dimensionalen Raum als Menge von Zahlen zu betrachten auch auf den für die Physik interessanten Fall des dreidimensionalen Raums erweitern liesse. Die Vorgehensweise war also prinzipiell die

Entgegengesetzte: Ausgehend von einer konkreten Vorstellung hin zu einer abstrakten Definition. Mit seinen konstruktiven Versuchen hatte Hamilton zunächst keinen Erfolg. Aus heutiger Sich ist das nicht verwunderlich, denn es gilt der folgende Satz:

Satz . Sei $\mathcal{A}$ eine reelle Divisionsalgebra mit eins. Dann gilt:

$$dim\mathcal{A} \equiv 1 mod 2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \cong \mathbb{R}$$

Beweis. Sei $a \in \mathcal{A}$ beliebig. Die Abbildung $x \rightarrowtail ax$ ist nun ein Endomorphismus und hat einen reellen Eigenwertλ, da $dim\mathcal{A}$ ungerade ist. Ist $v \neq 0$ der dazugehörige Eigenvektor so gilt: $(a - \lambda e)v = 0$ und somit $a = \lambda e$ was dazu führt, dass $\forall a \in \mathcal{A}$, $a \in \mathbb{R}e \quad \Leftrightarrow \mathcal{A} \cong \mathbb{R}$ □

Zum Glück hatte Hamilton noch keine Einsicht in diesen Satz, sondern versuchte statt dessen die „dreidimensionale Multiplikation" direkt anzugeben. Dabei machte er folgenden Ansatz:

$$\alpha + \beta i + \gamma j \quad \text{wobei } i^2 = j^2 = -1$$

Um für diese Zahlentripel eine vernünftige Multiplikation zu definieren, fordert man, dass das die (euklidische) Länge eines Produkts gleich dem Produkt der einzel Längen entspricht. Diese Eigenschaft allerdings zu erfüllen erwies sich schwerer als zunächst gedacht, denn bei der Berechnung der Länge des Quadrates eines Zahlentripels war stets ein Term $2ij\beta\gamma$ Differenz zwischen Länge des Produktes und des Produktes der Länge. Dieses Problems wurde Hamilton aber nun damit Herr, dass er ganz einfach $ij = k$ und $ji = -k$ setzte. Zum einen hatte er damit die Dimension um eins erhöht, aber was auf den ersten Blick noch wundersamer anmutet: Die so entstandenen „Zahlen" sind nicht mehr kommutativ! Setzt man jedoch wieder $k^2 = -1$ bleibt auf jeden Fall die Assoziativität erhalten.[1]Somit ergibt sich für die Quaternionen:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Die ursprüngliche Aufgabe, nämlich im dreisimensionalen Raum „zu rechnen" wurde nun dadurch gelöst, den dreidimensionalen Imaginärteil von Quaternionen zu betrachten. So neuartig und fremd diese Form von Zahlen damals auch gewirkt haben, die für sie typischen Rechenregeln waren wohl schon

[1]Koecher und Remmert weisen in [1] darauf hin, dass sich bei Hamilton wohl zum ersten Mal der mathematische Begriff der Assoziativität findet.

Euler und Gauss bekannt (vgl. [1])
Die Aufgabe der Komutativität sorgt bei den Quaternionen $\mathbb{H}$ für einige Kuriositäten:

Beobachtung . Das kubische Polynom $X^2iXi + iX^2iX - iXiX^2 - XiX^2i \in \mathbb{H}[X]$ wird von allen Quaternionen annulliert.

Beweis. Für jedes Element $X \in \mathbb{H}$ gilt: $X^2 = \alpha X + \beta e$ [2]. Ersetzt man nun X^2 in obigem Polynom durch $\alpha X + \beta e$ wird die Behauptung evident. □

Aber auch der aus den komplexen Zahlen bekannte Fundamentalsatz bekommt einen andere Gestallt:

Satz (Fundamentalsatz für Quaternionen). Jedes reine Polynom $X^n - a$, $a \in \mathbb{H}$, $n > 0$ hat Nullstellen in jeder Ebene in $\mathbb{H}$, die 0,e und a enthält.

Beweis. Jede solche Ebene ist eine zu $\mathbb{C}$ isomorphe Unteralgebra von $\mathbb{H}$ und somit existieren in jeder Ebene Nullstellen nach dem Fundamentalsatz für komplexe Zahlen. □

Es gibt also auch Polynome mit unendlich vielen Nullstellen!
Eine bemerkenswerte Anwendung der Quaternionen findet sich auch in der Vektoranalysis, so dass Hamilton selber sogar die Quaternionen als eine der Infinitisimalrechnung ebenbürtige Erfindung auffasste.
Dazu führte Hamilton den ∇-Operator ein[3]

$$\nabla := \frac{\delta}{\delta x} i + \frac{\delta}{\delta y} j + \frac{\delta}{\delta z} k$$

Wendet man diesen Operator auf ein differenzierbares Quaternionenfeld $F(x, y, z)$ an erhält man die erstaunliche Beziehung:

$$\nabla F = -(divF)e + rotF.$$

und zweimalige Anwendung dieses Operators liefert den Laplace-Operator:

$$\nabla^2 = -\triangle f$$

[2]Eine Divisionsalgebra mit dieser Eigenschaft wird als quadratisch bezeichnet.
[3]Der Name Nabla kommt von einem alten jüdischen Musikinstrument- Hamilton sprach bereits im Alter von 5 Jahren Griechisch, Latein und Hebräisch!

Die Eleganz mit der diese Formeln folgen, ist in der Tat verblüffend und erklärt sicherlich auch die Euphorie Hamiltons und seiner Schüler. In einer Zeit bevor das Kalkül mit Matrizen wirklich ausgereift war, stellten somit die Quaternionen eine durchauselegante Schreibweise dar. So sind beispielsweise die Maxwellgleichungen der Elektrodynamik zuerst mit Hilfe von Quaternionen geschrieben worden.
Nur zwei Monate nach Hamiltons Entdeckung der Quaternionen schuf Gaves die achtdimensionalen Oktaven. Diese sind dann aber schon nicht mehr assoziativ! Obwohl bei jedem Schritt in höhere Dimensionen eine wichtige Eigenschaft verloren zu gehen scheint, schien es möglich immer neue hyperkomplexe Systeme mit „vernünftiger“ Multiplikation zu schaffen. Doch dieser Traum wurde von Frobenius 1877 zerstört, als er folgenden Satz zeigen konnte:

Satz (Frobenius 1877). Sei $\mathcal{A} \neq 0$ assoziative, nullteilerfreie quadratische reelle Algebra, dann ist gilt genau eine der folgenden Aussagen:

$$\mathcal{A} \cong \mathbb{R}$$

$$\mathcal{A} \cong \mathbb{C}$$

$$\mathcal{A} \cong \mathbb{H}$$

1933 konnte Max Zorn dann noch den folgenden Satz für den nicht assoziativen Fall zeigen:

Satz (Zorn 1933). Für jedereelle, nullteilerfreie, quadratische, alternative Divisonasalgebra $\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathcal{A} \text{ nicht assoziativ} \Leftrightarrow \mathrm{A} \cong \mathbb{O}$$

Somit war als der Schöpfungsvielfalt von Zahlen gewisse Grenzen aufgezeigt. Eine schöne Einführung in die Theorie der Algebren, in der sich auch die Beweise der beiden letzten Sätze finden, bietet[1].
Zu Beginn des Vortrages hatte ich in der Hinführung damit begonnen, an die Zeit zu erinnern, in der uns Zahlen begegneten. Dabei habe ich von Bauklötzen gesprochen. Mir scheint dieses Bild ein sehr schönes zu sein, und ein Stück weit läßt es sich auch auf die Mathematik anwenden, womit nun

der Bogen zum Thema „Wirklichkeit der Mathematik”gespannt wäre: Zu Beginn sind kleine Bausteine vorhanden, mehr oder weniger ungeornet und aus diesen lassen sich die wundersamsten Dinge schaffen. Dies trifft auch auf die Mathematik zu, nur dass hier die Bausteine und die daraus gemachten Strukturen nicht so direkt greifbar scheinen, wie die Türme, die man im Kindergarten aus Bauklötzen schuf.

Literatur

[1] [Eb] Ebinghaus et al. „Zahlen“ Springer Verlag

[2] [LF] Lutz Führer „Die widerwillige Entdeckung der komplexen Zahlen“ Online Version Uni Frankfurt

[3] [JB] Jörg Bewersdorff „Algebra für Einsteiger“ Vieweg