Parkettierungen, Quasikristalle und 'unmögliche' Symmetrien

Henning Hollborn

1 Parkettierungen (Grundbegriffe)

Eine *Parkettierung*[1] ist eine lückenlose, überlappungsfreie Bedeckung der Ebene mit bestimmten Figuren, den Parkettsteinen oder Fliesen. Dabei betrachtet man vor allem Parkettierungen mit einem begrenzten Sortiment von Parkettsteinen.

1.1 Symmetrien

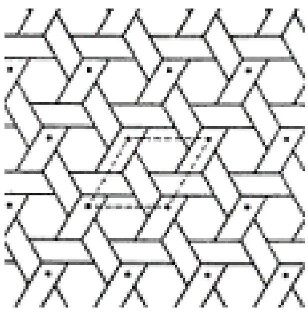

Abbildung 1. Periodenparallelogramm

Eine Abbildung eines Musters heißt *Symmetrie*, wenn Urbild und Bild übereinstimmen. Dabei unterscheidet man *Translation* (Verschiebung), *Rotation* (Drehung) und Spiegelung.

Eine Rotationssymmetrie heißt *n-zählig*, wenn das Muster unter einer Drehung um den n-ten Teil des Vollwinkels invariant bleibt.

Ein translationssymmetrisches Muster heißt *periodisch*. Ein ebenes zweifach-periodisches Muster (d.h. mit Translationssymmetrie in zwei Richtungen) lässt sich bereits durch einen kleinen Ausschnitt, das *Periodenparallelogramm* vollständig beschreiben (siehe Abb. 1). Beispiele für periodische Muster findet man etwa bei Escher.

Natürlich sind nicht alle Muster periodisch. Unter den nicht-periodischen Mustern gibt es Exoten, die zwar keine Translationssymmetrie besitzen, aber dennoch einen hohen Ordnungsgrad aufweisen, da die Struktur durch einen festen Algorithmus aufgebaut werden kann. Diese nennt man *quasiperiodisch*.

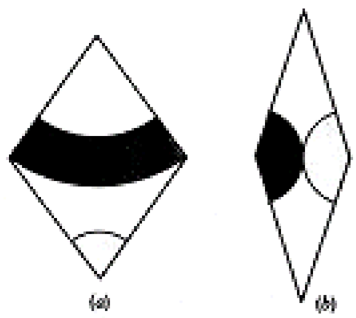

Abbildung 3.

Viele Parkettsteine lassen sowohl eine periodische als auch eine nichtperiodische Parkettierung zu. Allerdings gibt es Parkettsteine, die eine quasiperiodische Parkettierung erzwingen, etwa die Penroserauten.

1.2 Selbstähnlichkeit

ist die Skaleninvarianz bestimmter Strukturen:
bei einer Vergrößerung geht ein Teil in das

[1] Um selber einmal zumindest einen kleinen Ausschnitt aus einem Penroseparkett selber zu legen, findet man ein solches zum kopieren und ausschneiden am Ende des Buches und auf der CD-ROM. Als Anlegeregel gilt dabei, dass nur Kanten mit gleicher Kantenmarkierung aneinandergelegt werden dürfen.

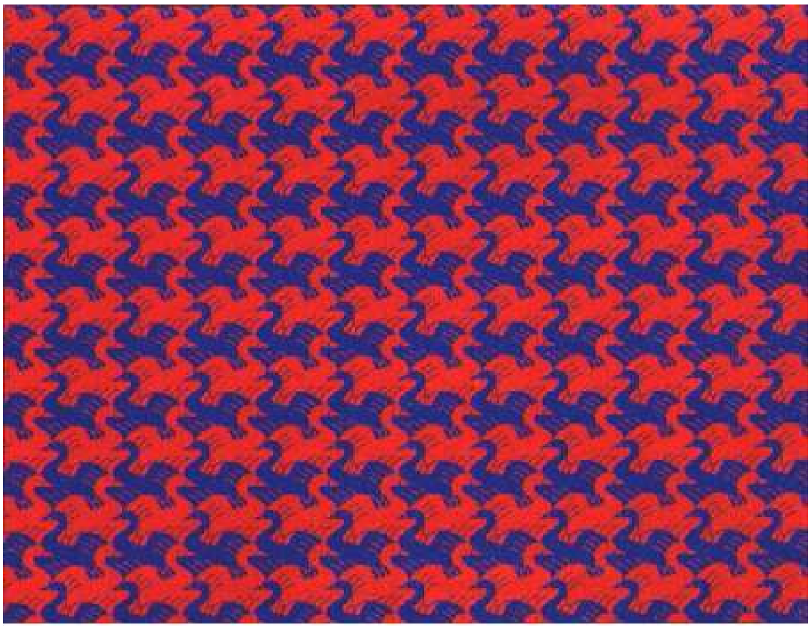

Abbildung 2. Periodische Muster bei Escher

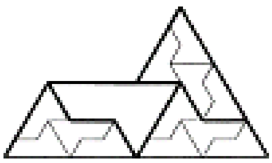

Abbildung 4. Selbstähnlichkeit

ursprüngliche Ganze über („Inflation“), bei einer Verkleinerung das Ganze in eines seiner ursprünglichen Teile („Deflation“). Ein selbstähnliches Muster kann man durch wiederholte Inflation aus einer einzigen Ausgangszelle aufbauen.

1.3 Beispiele

- karierte Papier: besitzt als Periodenparallelogramm einfach ein Quadrat und ist selbstähnlich (in einem Deflationsschritt lässt man jede zweite horizontale und vertikale Linie weg und verkleinert um 50%, so erhält man genau das ursprüngliche Muster)
- Ein klassisches Beispiel für Selbstähnlichkeit ist das Sierpinskidreieck (vgl. Abb. 5): Das große Dreieck hat dieselbe Struktur wie jedes der drei kleineren Dreiecke, wie jedes der neun nächstkleineren … usw.
- Die drei 'einfachsten' Parkette (vgl. Abb. 6) erhält man, indem man jeweils ausschließlich reguläre Dreiecke, Vierecke (→Karopapier, s.o.) oder Sechsecke (→Bienenwaben) als Parkettsteine verwendet.
  Mit regulären Fünfecken bleiben jedoch unschließbare Lücken:

1.4 Kristalle

Setzt man an die Ecken der Parkettsteine Atome, so kann man Kristalle als (dreidimensionale) Parkette auffassen. In der Kristallstrukturforschung macht man sich zunutze, dass klassische Kristalle stets translationssymmetrisch sind: In diesem Fall sind nämlich nur zwei-, drei-, vier- oder sechszählige Drehsymmetrien möglich, nicht jedoch beispielsweise fünfzählige. So bleiben nicht mehr viele Möglichkeiten für die Kristallgitter: schon seit Mitte des 19. Jahrhunderts sind diese klassifiziert, es gibt 14 sog. Bravais-Gitter, und aus Beugungsbildern kann man relativ leicht auf die räumliche Struktur der Kristalle schließen.

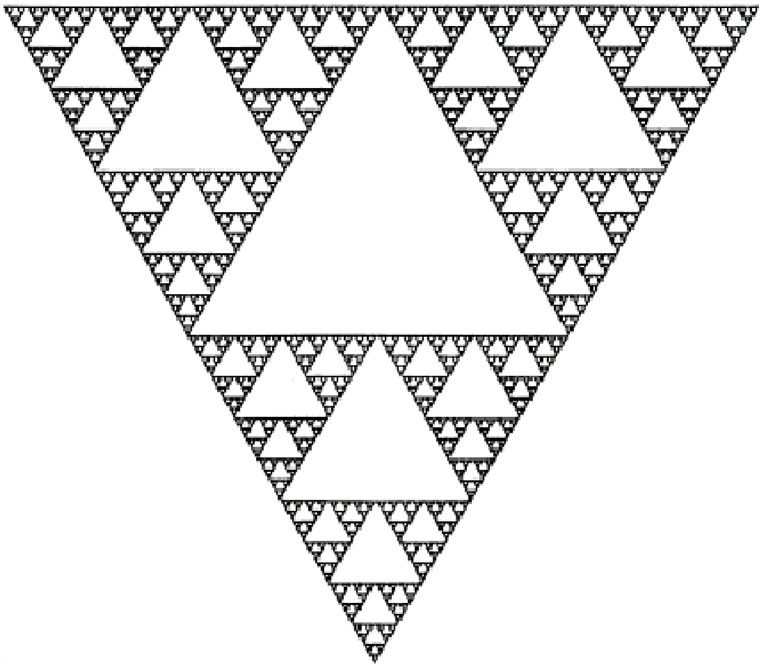

Abbildung 5. Sirpinskidreieck

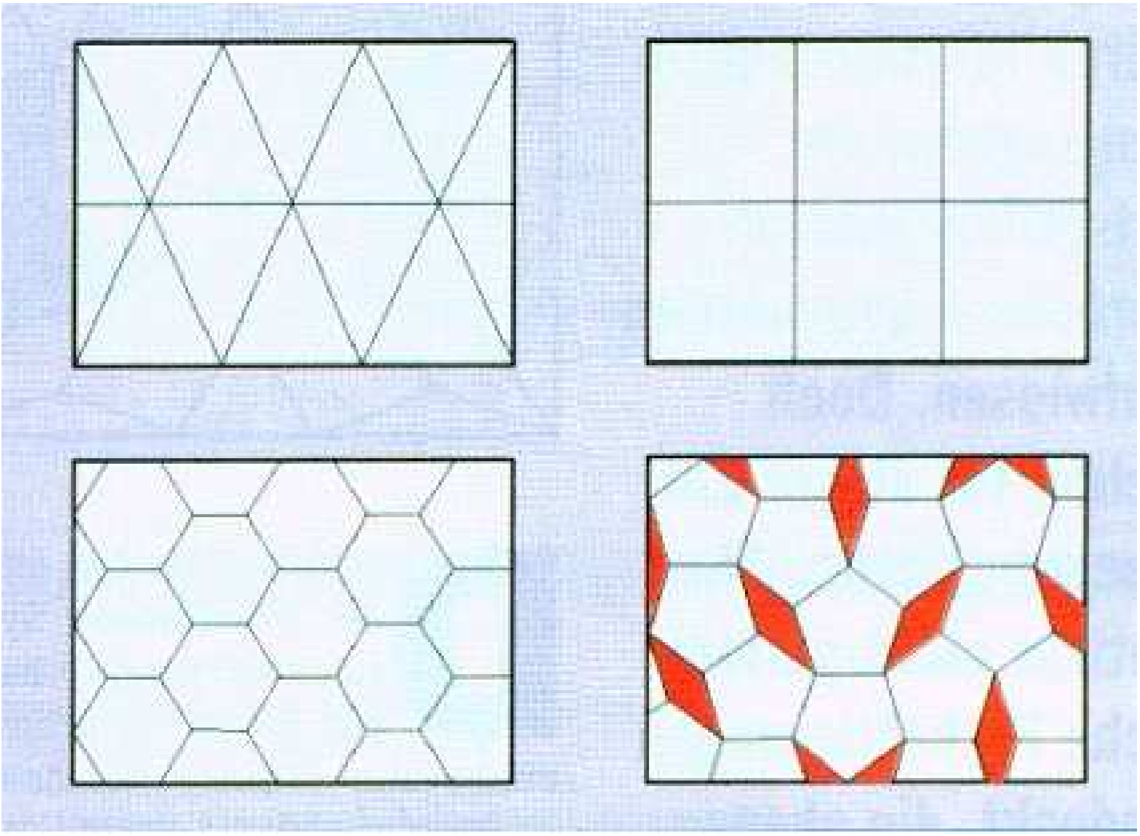

Abbildung 6. Einfache Parkette

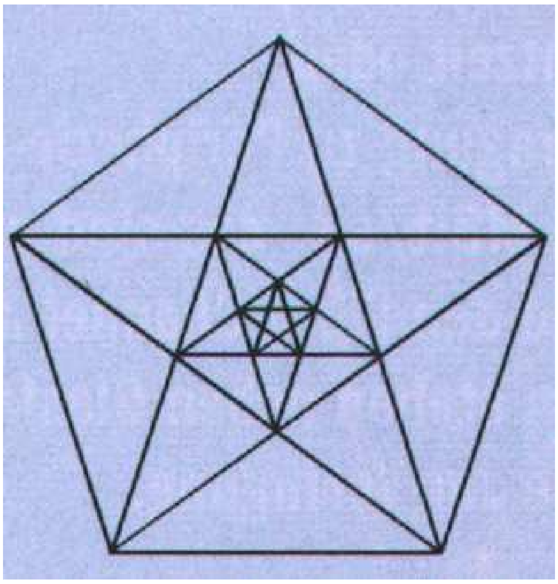

Abbildung 7.

2 Das Fünfeck, der Goldene Schnitt und die Fibonaccikette

In einem Fünfeck findet man den Goldenen Schnitt im Teilungsverhältnis der Diagonalen.
Den Goldenen Schnitt erhält man, wenn man eine Strecke an einem Punkt teilt, so dass der kleinere Abschnitt im selben Verhältnis zum größeren Abschnitt steht wie der größere Abschnitt zur Gesamtstrecke.
Der genaue Wert beträgt $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803398\ldots$

2.1 rekursive Erzeugung der Fibonaccikette:

Mit der Fibonaccikette kann man Näherungen für den Goldenen Schnitt erzeugen:
Durch die Rekursionsvorschrift $f_1 = 1, f_2 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ erhält man zunächst die Fibonaccizahlen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...
Die Folge der Quotienten aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen $\frac{f_n}{f_{n+1}}$ geht nun für große n gegen den Goldenen Schnitt.
Die Fibonaccikette ist nun die Zeichenkette, die durch folgende Rekursion erzeugt wird: $z_1 = S, z_2 = L, z_{n+2} = z_{n+1} \oplus z_n$ (jede neue Zeichenkette erhält man durch Aneinanderhängen der beiden vorherigen). In den ersten Schritten erhält man:
S
L
LS
LSL
LSLLS
LSLLSLSL
LSLLSLSLLSLLS
⋮
Per Konstruktion hat also z_i die Länge f_i.

Außerdem enthält z_{n+2} den Buchstaben L genau f_{n+1}mal und den Buchstaben S genau $f_n$mal. Das Anzahlverhältnis S zu L in der unendlich langen Fibonaccikette ist also gerade das des Goldenen Schnitts.

2.2 lokale Regeln?

Eine Beobachtung, die man auch hier machen kann: Es gibt keine lokalen Wachstumsregeln für die Kette, das heißt: Auf ein S folgt sicher ein L, aber ohne Kenntnis der gesamten Kette kann man an keinem Punkt entscheiden, ob auf ein L ein zweites L folgt oder ein S. Die Fibonaccikette ist 'offensichtlich' nichtperiodisch, dennoch kommt jeder Ausschnitt beliebig oft vor (denn er wird ja ständig wieder angehängt).

2.3 Inflation und Deflation

Ebenso kann man die Fibonaccikette durch das Inflationsverfahren erhalten: Man startet mit einem S und ersetzt in jedem Inflationsschritt S durch L und L durch LS.

2.4 geometrische Veranschaulichung

zeichnet man die Fibonaccikette in ein Quadratgitter ein, indem man für jedes L ein Kästchen nach rechts und für jedes S ein Kästchen nach oben geht, so ist die Steigung der Geraden durch Anfangs- und Endpunkt offensichtlich das Anzahlverhältnis der L zu S, nähert sich also dem Goldenen Schnitt (Abb. 8).

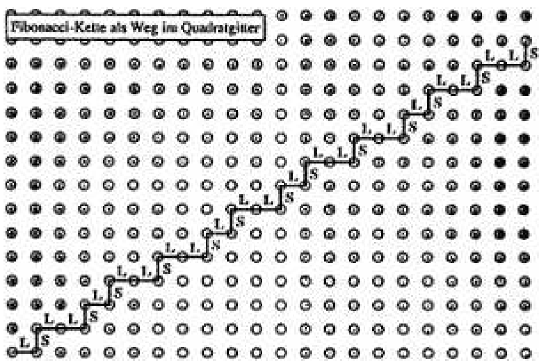

Abbildung 8.

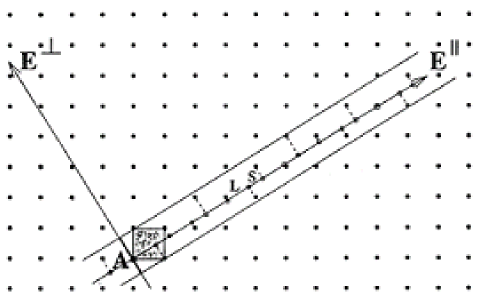

Abbildung 9.

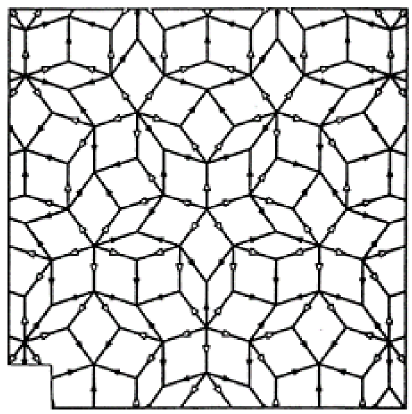

Abbildung 10.

2.5 Projektion

Nun kann man die ganze Sache auch umdrehen: Man zeichnet in ein Quadratgitter eine Gerade der Steigung τ. Darauf projiziert man alle Punkte, die in der Nähe liegen. So erhält man Punkte auf der Geraden, und die kurzen und langen Abstände zwischen ihnen entsprechen gerade den L und S der Fibonaccikette, also den Schritten nach rechts bzw. oben.
Dieses Streifenprojektionsverfahren ist im allgemeinen dazu geeignet, quasiperiodische Muster aus periodischen (etwa dem Quadratgitter) zu erhalten, einzige Bedingung ist die Projektion unter einem irrationalen Winkel (Abb. 8).

3 Penrose-Parkette und quasiperiodische Parkettierungen

3.1 Konstruktion

Ein Penroseparkett erhält man ähnlich wie die Fibonaccikette durch das Streifenprojektionsverfahren. Hier projiziert man ein fünfdimensionales Quadratgitter, genauer gesagt, einen rhombentriakontaedrischen Streifen davon, auf eine (zweidimensionale) Ebene.
Wie bei der Fibonaccikette gibt es auch hier noch andere Möglichkeiten:

durch Anlegen Das haben wir ja vor dem Vortrag schon ausprobiert. Hier stellt man fest, dass die lokalen Anlegeregeln keine eindeutige Fortsetzung erzwingen und Baufehler nicht verhindern können.

durch Inflation / Deflation Markiert man die Penroserauten wie in Abbildung 12,so verläuft die Inflation hier wie folgt:

eine halbierte dünne Raute wird um eine halbe dicke Raute ergänzt, eine halbierte dicke Raute um eine halbe dünne und eine weitere halbe dicke.

'Netto' entsteht also aus einer dünnen Raute eine dicke und eine dünne, aus einer dicken zwei dicke und eine dünne. Einige Inflationsschritte sind in Abbildung 13 dargestellt.

3.2 Eigenschaften

Selbstähnlichkeit Mit der Selbstähnlichkeit ist es hier etwas komplizierter: Wendet man auf einen Ausschnitt eines Penroseparkettes vier Inflationsschritte an, so ist

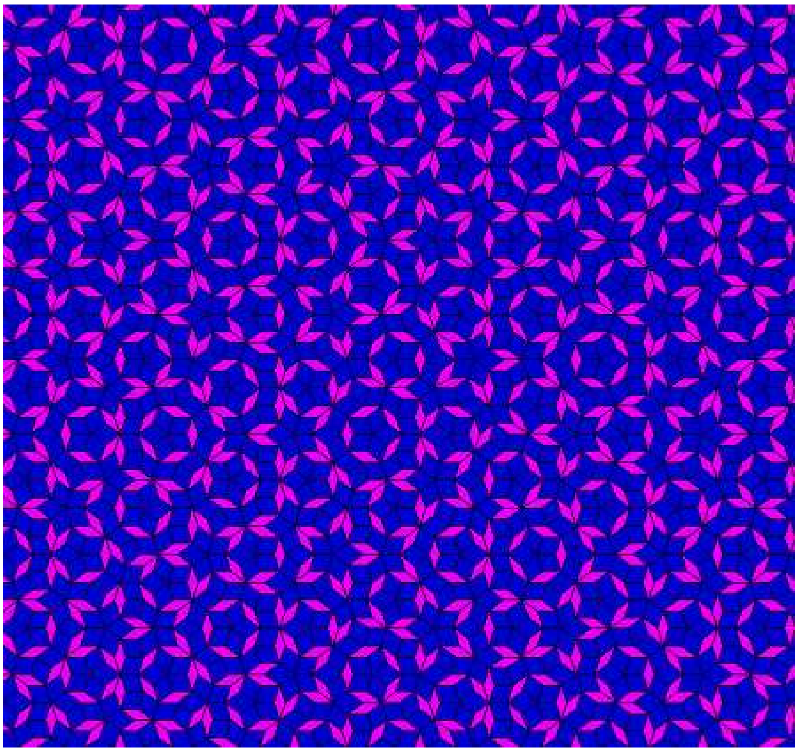

Abbildung 11. Penroseparkett

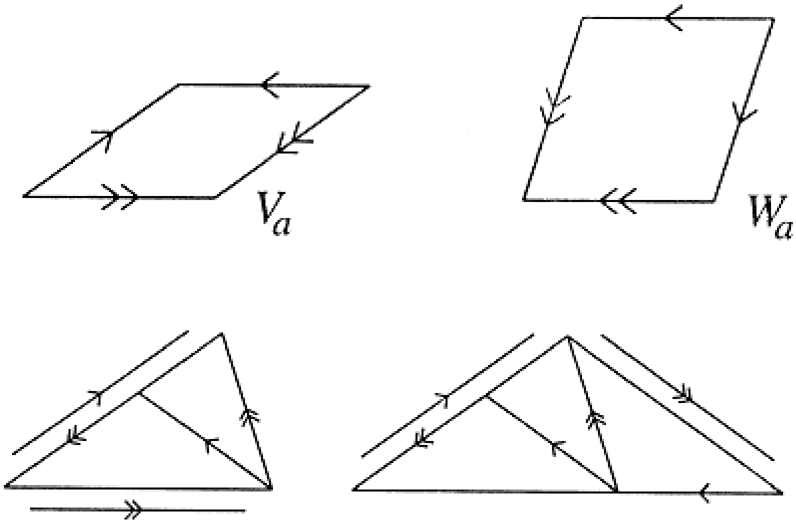

Abbildung 12. Konstruktion durch Inflation/Deflation

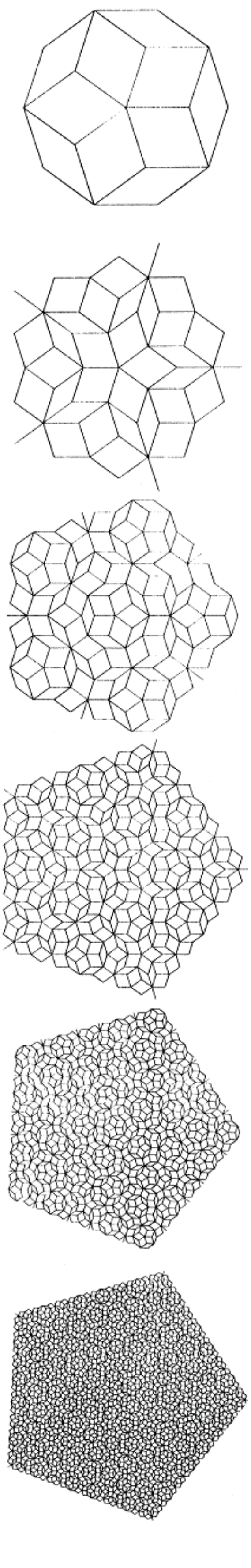

Abbildung 13. Inflationsschritte

der ursprüngliche Ausschnitt im entstehenden Muster in mehreren Ausfertigungen in gleicher Orientierung enthalten, ein 'komplettes' (d.h. unendlich großes) Penroseparkett bleibt also unverändert, wenn man viermal Inflation bzw. Deflation durchführt.

lokale Isomorphie Die möglichen Penroseparkette (und das sind überabzählbar viele) sind alle *lokal isomorph*, d.h. jeder endlich große Ausschnitt kommt in jedem Penroseparkett unendlich oft vor.

Wenn man nur endliche Ausschnitte betrachtet, sehen also alle Penroseparkette 'gleich' aus. Wie beweist man das?
Mit dem Inflations-/Deflationsverfahren ist das gar nicht schwer: Ein einzelner Parkettstein ist offensichtlich unendlich oft in jedem Parkett vorhanden. Nun nimmt man einen beliebig großen Ausschnitt und wendet darauf so oft Inflationen an, bis der Ausschnitt ganz in einer einzelnen Raute enthalten ist. Diese Raute findet man in allen Parketten unendlich oft wieder, wenn man dort also so viele Deflationsschritte anwendet, wie man vorher Inflationen durchführen musste, erhält man den ursprünglichen Ausschnitt auch hier.

Rautenverhältnis Aus der Inflationsvorschrift kann man ableiten, dass in einem unendlich großen Penroseparkett die Anzahl der dünnen und dicken Rauten gerade im Verhältnis des Goldenen Schnitts steht.

nichtperiodisch: 'Probleme' mit lokalen Regeln Penroseparkette besitzen lokal fünfzählige Drehsymmetrie, sind jedoch nicht periodisch, d.h. sie besitzen keine Translationssymmetrie.

Auch diese Eigenschaft ergibt sich aus der Selbstähnlichkeit: Angenommen, es gäbe ein Periodenparallelogramm, dann könnte man auf einen solchen Ausschnitt so oft Deflationen anwenden, bis der gesamte Ausschnitt in einer Raute enthalten ist. Man erhält einen Widerspruch, da schon die Anlegeregeln verbieten, mit dieser Raute periodisch zu parkettieren.

Eine weitere kuriose Eigenschaft sind die lokale Anlegeregeln selbst, sie sind nämlich nicht 'eindeutig': Dass sie Baufehler nicht verhindern, merkt man bei den ersten eigenen Versuchen, ein Parkett zu legen.

Außerdem können sie keine eindeutige Fortsetzung erzwingen: Angenommen, die Anlegeregeln würden am Rand eines bestimmten Ausschnittes eine eindeutige Fortsetzung erzwingen. Wie wir gesehen haben, kommt dieser Ausschnitt unendlich oft vor, und dadurch würde ein periodisches Parkett entstehen, was wiederum unmöglich ist.

3.3 Bedeutung in der Physik: Entdeckung von Quasikristallen

Zur Überraschung aller Kristallstrukturforscher wurden 1984 kristallähnliche Strukturen mit fünfzähliger Symmetrie entdeckt.
Wie bereits weiter oben angedeutet, galt vorher die Translationsinvarianz des Kristallgitters als unantastbar, alle möglichen Atomformationen in Kristallen konnten durch die Bravais-Gitter beschrieben werden, und danach waren nur drei-, vier- und sechszählige Symmetrien möglich.
Folglich nannte man die entdeckten Strukturen Quasikristalle. Bei der weiteren Untersuchung ihrer Eigenschaften traten noch viele Überraschungen und Probleme auf, die bis heute noch nicht vollständig verstanden werden:
Schon die mechanischen Eigenschaften sind kurios: dreidimensionale Quasikristalle sind sehr hart, aber dennoch recht elastisch, und obwohl es sich um Metalllegierungen handelt, haben sie einen hohen elektrischen Widerstand, der allerdings sinkt, je mehr Baufehler in der Struktur auftreten.
Man nimmt an, dass die Kristallgitter beispielsweise wie Penrosemuster in drei Dimensionen aussehen: Mit den bisherigen (auf der Translationsinvarianz des Kristallen aufbauenden) Methoden der Festkörperphysik ist aber nicht so einfach ableitbar, wo sich die Atome befinden.
Nach allgemeiner Vorstellung baut sich ein Kristall atomweise auf, sozusagen unter Beachtung der Anlegeregeln. Wie wir aber gesehen haben, können unsere lokalen Regeln Fehler nicht verhindern. Warum entstehen dann trotzdem fehlerfreie quasikristalline Strukturen?
Ein Erklärungsansatz geht von der Beobachtung aus, das in einem Penroseparkett die Fliesen so zu Zehnecken zusammenfassen kann, dass diese das ganze Parkett überdecken. Natürlich geht das nicht ohne Überlappungen, aber auch in einem Kristall können sich die den Atomen zugeordneten Einheitszellen überschneiden.

4 Penrosemuster in höheren Dimensionen

Im dreidimensionalen Raum gibt es ebenfalls Penrose-Muster. Außerdem wurde inzwischen der Ëinsteinëntdeckt, ein einzelner Baustein, der den Raum nur quasiperiodisch füllt.[2]

5 Penrosemustern in der Kunst

Nicht nur Escher verarbeitet Mathematik zu Kunstwerken.
Im Falle der Penrosemuster und Fünfeck-Symmetrie war es der holländische Künstler Gerard Caris, und vieles dazu findet man im Ausstellungskatalog "Kunst und Mathematik. Neue Reflexionen über das Fünfeck", 1999 Ludwigshafen am Rhein.
Unter http://www.elenimylonas.com/ quasi.htm findet man Werke der griechischen Künstlerin Eleni Mylonas.

6 Literaturtipps

M. Baake, U. Grimm, R.V. Moody: "Die verborgene Ordnung der Quasikristalle",

[2] Bastelbögen dazu finden sich auf der CD-ROM

Spektrum der Wissenschaft 2/2002, S. 64-74

N.G. de Bruijn: Remarks on Penrose Tilings", in R. Graham und J.Nešetøil (Hg): The Mathematics of Paul Erdõs II", Springer, Berlin 1997, S. 264-283

M. Gardner: Mathematical Games", Scientific American 1/1977, S. 110-122

B. Grünbaum, G. Shephard: Tilings and Patterns", New York 1987

B. Harbrecht, M. Conrad: "Verbotene Kristalle", Marburger Uni-Journal 6/2000, S. 6, zu finden unter http://www.uni-marburg.de/zv/news/archiv/muj-00-6/600-06.html

R. Penrose: Pentaplexity - A Class of Non-Periodic Tilings of the Plane", The Mathematical Intelligencer, Volume 2, Number 1, 1979, S. 32-37

C. Schönleber, F. Klinkenberg-Haaß: "Goldene Schnittmuster", mc-extra 2/1995, S. 21-25, zu finden unter http://www.toppoint.de/~freitag/penrose/f-d-penrose.html