Ars sine Scientia nihil est - Die sieben Friesgruppen

Anja Korsten

1 Von der Kunst zur Symmetrie

1.1 Kunst

Besichtigt man eine der vielen Kirchen in Rom, dann fallen einem zuerst große Gemälde, Säulen, Statuen, der Altar und vielleicht auch die Pflasterung des Bodens auf. Meistens unbemerkt aber bleiben die unzähligen Bandornamente, die diese Gemälde und Säulen schmücken. Diese auch als Friesornamente bezeichneten Verzierungen entstehen, wenn Kopien einer beliebigen Form in regelmäßigen Abständen entlang einer Linie aufeinander folgend angeordnet werden. Friesornamente lassen sich in Architektur und Bemalungen von der Antike bis heute sowohl in christlicher, also auch in islamischer Kunst, bei den Ägyptern und Inkas, in Indien und in China wiederfinden.

Abbildung 1. Friesornamente in verschiedenen Kulturen

Bei einer so großen Vielfalt stellt sich zwangsläufig die Frage, wie man einen Überblick bekommen kann, welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede solche Friese haben, und ob sich nicht Regeln finden lassen, anhand derer man die Friese in Klassen oder Gruppen einteilen kann.

1.2 Symmetrie

Es macht - mathematisch gesehen - wenig Sinn, Friese nach Entstehungszeit und -ort einzuteilen. Anfangs hat man noch versucht Friesmuster nach den benutzten Formen und Farben zu unterscheiden, aber auch das führte zu keinem zufriedenstellenden Ergebnis. Der ungarische Mathematiker George Pólya (1887, Ungarn - 1985, Kalifornien) war schließlich derjenige, der als erster die Gruppentheorie nutzte und 1924 in seiner Arbeit *über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene* die Symmetrien der Ebene und damit auch die Friesgruppen vollständig klassifizierte.

Mathematiker – wie Pólya – suchen nach allgemeinen Prinzipien. Ein Dreieck, dessen Winkelsumme 180° ergibt, beeindruckt uns nicht besonders. Viel bemerkenswerter ist es, dass das Gleiche für jedes beliebige Dreieck gilt. Auf der Suche nach allgemeinen Prinzipien ist es hilfreich, zahlreiche Beispiele zu sammeln, denn erst dann kann man vergleichen und gegenüber stellen und die zugrundeliegenden Gesetze oder Regeln und auch Ausnahmen herausfinden.

Betrachtet man die Beispiele in Abbildung 1, kann man sehen, dass sich diese Friese durch Verschieben, Spiegeln und Drehen wieder ineinander überführen lassen. Diese drei Begriffe gehören zum mathematischen Begriff der Symmetrie, der im Weiteren genauer untersucht werden soll, um mit den Ergebnissen die Friese zu klassifizieren.

2 Von der Symmetrie zur Mathematik

2.1 Was ist Symmetrie?

Symmetrie im heutigen Sinn ist das älteste Bindeglied zwischen Geometrie und der dekorativen Gestaltung von Flächen und Gegenständen. Wir finden diese in allen Kulturen und zu allen Zeiten, meist in einer für die jeweilige Kultur charakteristischen Ausprägung. Das aus dem Griechischen stammende Wort für Ebenmaß hatte jedoch bis ins 19. Jahrhundert eine andere Bedeutung als heute. Es bezeichnete

> *... das wiederholte Auftreten derselben Verhältnisse (Proportionen) an verschiedenen Teilen eines Gebäudes oder Kunstwerkes im Kleinen und im Großen.*

1851 beschrieb A. Möbius in einer Arbeit über symmetrische Figuren den Begriff der Symmetrie schon etwas anders:

> *So wie jede Größe sich selbst gleich ist, so ist auch jede Figur sich selbst gleich und ähnlich. Es gibt aber Figuren, welche sich selbst auf mehr als eine Art gleich und ähnlich sind, und solche Figuren sollen symmetrisch genannt werden ...*

2.2 Abstraktion

Symmetrie in der Ebene - da denkt man zuerst an die Spiegelung einer Figur an einer Achse.

Es ergeben sich aber noch andere Symmetrien, wenn man mehrere Spiegelungen hintereinander ausführt.

Jede beliebige solche Komposition von Spiegelungen heisst Bewegung, also eine abstandstreue Abbildung der Ebene in sich, d.h. eine Abbildung, die die ebene Fläche nur in soweit verändert, dass alle Abstände erhalten bleiben. Zusammengefasst werden diese Bewegungen in einer Gruppe, der sogenannte Bewegungsgruppe $\mathcal{B}$. Diese soll nun näher untersucht werden.

3 Die Mathematik dahinter

3.1 Abstandstreue Bewegungen

Die beiden folgenden Abbildungstypen sind abstandstreu und gehören zur Bewegungsgruppe:

orthogonale Abbildungen: Eine Art von Bewegungen der Ebene sind die Elemente der orthogonalen Gruppe $O(\mathbb{R}^2)$, das sind alle bijektiven linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die das Skalarprodukt festlassen, oder auch

$$O(\mathbb{R}^2) := \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A^{-1} = A^t\}$$

Der Betrag der Determinante dieser 2×2-Matrizen ist gleich 1. Im Fall det A = 1 handelt es sich um eine Drehung um den Ursprung, andernfalls um eine Spiegelung an einer Achse durch den Ursprung.

Translationen: Andere Bewegungen der Ebene sind die Translationen, die Verschiebungen der Ebene um einen Vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$

$$T_u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, x \longmapsto x + u.$$

Das Bemerkenswerte ist jetzt, dass diese beiden Typen von Bewegungen, $O(\mathbb{R}^2)$ und $\{T_u \mid u \in \mathbb{R}^2\}$, schon genügen, um alle möglichen Bewegungen aus $\mathcal{B}$ zu beschreiben! Genau das besagt nämlich folgender Satz:

3.2 Charakterisierung von Bewegungen

Satz: Jede Bewegung b $\in \mathcal{B}$ lässt sich eindeutig als Hintereinanderschaltung einer Translation T_u und einer orthogonalen Abbildung A $\in O(\mathbb{R}^2)$ beschreiben, d.h.

$$\forall b \in \mathcal{B} \quad \exists! \quad T_u \vee A \quad mit:$$

$$b(x) = T_u(Ax) = Ax + u \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Weiter gilt:

1. $\mathcal{B}$ ist eine Gruppe, denn $\forall b$ = "Ax + u", $\tilde{b}$ = "$\tilde{A}x + \tilde{u}$" $\in \mathcal{B}$ gilt:
   (a) $b*\tilde{b}(x) = A(\tilde{A}x+\tilde{u})+u = A\tilde{A}x+(A\tilde{u}+u)$
   (b) $b^{-1}(x) = A(x-u) = Ax+(-Au)$,
   d.h. $b*\tilde{b}$ und b^{-1} sind wiederum durch eine Matrix und einen Vektor darstellbar und somit aus $\mathcal{B}$
2. $\mathcal{B}$ = { "Ax + u" | $A \in O(\mathbb{R}^2), u \in \mathbb{R}^2\}$
   $\cong O(\mathbb{R}^2) \ltimes \mathbb{R}^2$
   = $AO(\mathbb{R}^2)$
   ist die affine lineare Gruppe.
3. Jede Bewegung b = "Ax + u" entspricht einem der folgenden Typen:
   (a) A = Id, d.h. b = "x + u" $\Longrightarrow$ b ist eine Translation/ **Verschiebung**
   (b) det A = 1, A $\neq$ Id $\Longrightarrow$ b ist eine **Drehung** (nicht notwendig um den Ursprung)
   (c) det A = -1 $\Longrightarrow$ A ist Spiegelung (s.o.) $\Longrightarrow$ b ist (Gleit-)**Spiegelung**

3.3 Symmetriegruppen

Für die Friesgruppen sind jetzt die Bewegungen interessant, die ein Fries so lassen, wie es ist - also nur die Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen, die das Fries wieder auf sich selbst schieben, drehen oder spiegeln:

Definition: Eine Bewegung b $\in \mathcal{B}$ heißt Symmetrie oder auch Deckbewegung einer Figur F $\subset \mathbb{R}^2$, falls gilt:

b(F) = F

Die Figur F wird also von einer F-Symmetrie nicht verändert.

Alle Symmetrien einer Figur F zusammen bilden unter Hintereinanderausführung die Symmetriegruppe $\mathcal{S(F)} \subset \mathcal{B}$. Hierbei ist zu beachten, dass die Gruppe $\mathcal{B}$ aller möglichen Bewegungen einer Ebene sehr viel größer ist als die Gruppe $\mathcal{S(F)}$ der möglichen Symmetrien einer Figur.

Die Symmetriegruppen der Ebene können in drei weitere Gruppentypen eingeteilt werden:

1. die **Rosettengruppen/**Punktgruppen, die keine Translation enthalten: $\mathcal{R}(F) = \{x \mapsto Ax \mid A \in O(\mathbb{R}^2), A(F) = F\}$
2. die **Friesgruppen**, die echte Translationen in eine Richtung enthalten: $\mathcal{F}(F) = \{x \mapsto Ax + u \mid A \in O(\mathbb{R}^2), u \in U \subset \mathbb{R}^2$, dim U = 1, $A(F) + u = F\}$
3. die **Ornamentgruppen /** Parkettierungen, die Translationen in zwei linearunabhängige Richtungen enthalten: $\mathcal{P}(F) = \{x \mapsto Ax + u \mid A \in O(\mathbb{R}^2), u \in U \subset \mathbb{R}^2$, dim U = 2, $A(F) + u = F\}$

Beispiel für Figuren, die symmetrisch bzgl. einer Rosettengruppe sind, sind außer den Rosettenfenstern in vielen Kirchen und Moscheen auch Radkappe und Fahrradreifen. Neben dem Muster von quadratischen Badfliesen, kann man Parkettierungen in einigen Zeichnungen von M.C. Escher finden. Weitere Beispiele für Fries-Figuren sind im Anhang zu sehen.

4 Die Friesgruppen

4.1 Charakterisierung der Friesgruppen

Satz: Sei $\mathcal{G} \leq \mathcal{B}$ ein diskrete Untergruppe, die nur Translationen in eine Richtung enthält (also eine Friesgruppe, wie unter Punkt 2 zuvor), dann gelten:

1. U = $\langle T_u \rangle_{\mathbb{Z}}$ für ein $u \in \mathbb{R}^2$. u heißt Minimaltranslation und jede andere Translation in $\mathcal{G}$ ist ein ganzes Vielfaches von u.
2. Es gibt genau eine Gerade g $\subset \mathbb{R}^2$ mit $g \parallel U$ und $b(g) = g\ \forall b \in \mathcal{G}$. Das heißt, g ist die einzige Gerade, die paralell zu U liegt und von jeder Friesbewegung aus $\mathcal{G}$ festgelassen wird.

3. Damit ergeben sich für die Friesbewegungen folgende Eigenschaften:
   (a) Jede Drehung $d \in \mathcal{G}$ hat einen Drehwinkel von 180° mit Drehzentrum auf g.
   (b) Für jede Spiegelachse $s \neq g$ gilt $s \perp g$.
   (c) g ist einzige Gleitspiegelachse
   (d) benachbarte Drehzentren und Spiegelachsen haben den Abstand einer halben Minimaltranslation.

Damit haben wir das nötige Werkzeug, um die Friesgruppen zu klassifizieren:

4.2 Klassifizierung der Friesgruppen

Anhand der unter 4.1 genannten Eigenschaften 1. bis 3.(d) der Friesbewegungen ergeben sich genau sieben Gruppen:

Jedes Fries wird entlang einer Achse um einen Vektor u verschoben, d.h. die Translation T_u ist in jeder Friesgruppe enthalten. Die anderen Gruppen sind durch Drehung d, horizontale Spiegelung s_h, vertikale Spiegelung s_v und/oder Gleitspiegelung s_g erweitert.

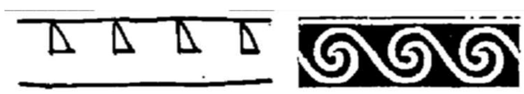

Abbildung 2. Fries 1

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &:= \langle T_u \rangle \\
\mathcal{F}_1^1 &:= \langle T_u, d \rangle \\
\mathcal{F}_1^2 &:= \langle T_u, s_h \rangle \\
\mathcal{F}_1^3 &:= \langle T_u, s_v \rangle \\
\mathcal{F}_1^4 &:= \langle T_u, s_g \rangle \\
\mathcal{F}_2^1 &:= \langle T_u, d, s_h, s_v \rangle \\
\mathcal{F}_2^2 &:= \langle T_u, d, s_g, s_v \rangle
\end{aligned}$$

4.3 Gruppenstruktur der Friesgruppen

Um eine bessere Übersicht über die sieben Gruppen zu bekommen, kann man diese noch in das folgende Gruppendiagramm einordnen:

$$\begin{array}{cccc}
 & \mathcal{F}_2^1 & \mathcal{F}_2^2 & \\
\mathcal{F}_1^2 & \mathcal{F}_1^1 & \mathcal{F}_1^3 & \mathcal{F}_1^4 \\
 & \multicolumn{2}{c}{\mathcal{F}_1} &
\end{array}$$

Die Friese lassen sich also neben dem einfachsten Fries, das nur verschoben werden kann, noch in zwei Klassen einteilen, wobei $\mathcal{F}_2^1$ und $\mathcal{F}_2^2$ höher symmtrisch sind als $\mathcal{F}_1^1$ bis $\mathcal{F}_1^4$. (Diese Struktur ist isomorph zu zwei miteinander verbundenen Kleinschen Vierergruppen.)

5 Friese überall

Friese sind nicht nur abstrakte mathematische Gebilde. Wenn man die Augen aufmacht und um sich herumschaut, wird man sie überall entdecken. Die folgenden Bilder sind einige Beispiele dafür, dass Friese nicht nur in Kunst, Architektur und Mathematik, sondern auch in jeder Alltagssituation vorkommen:

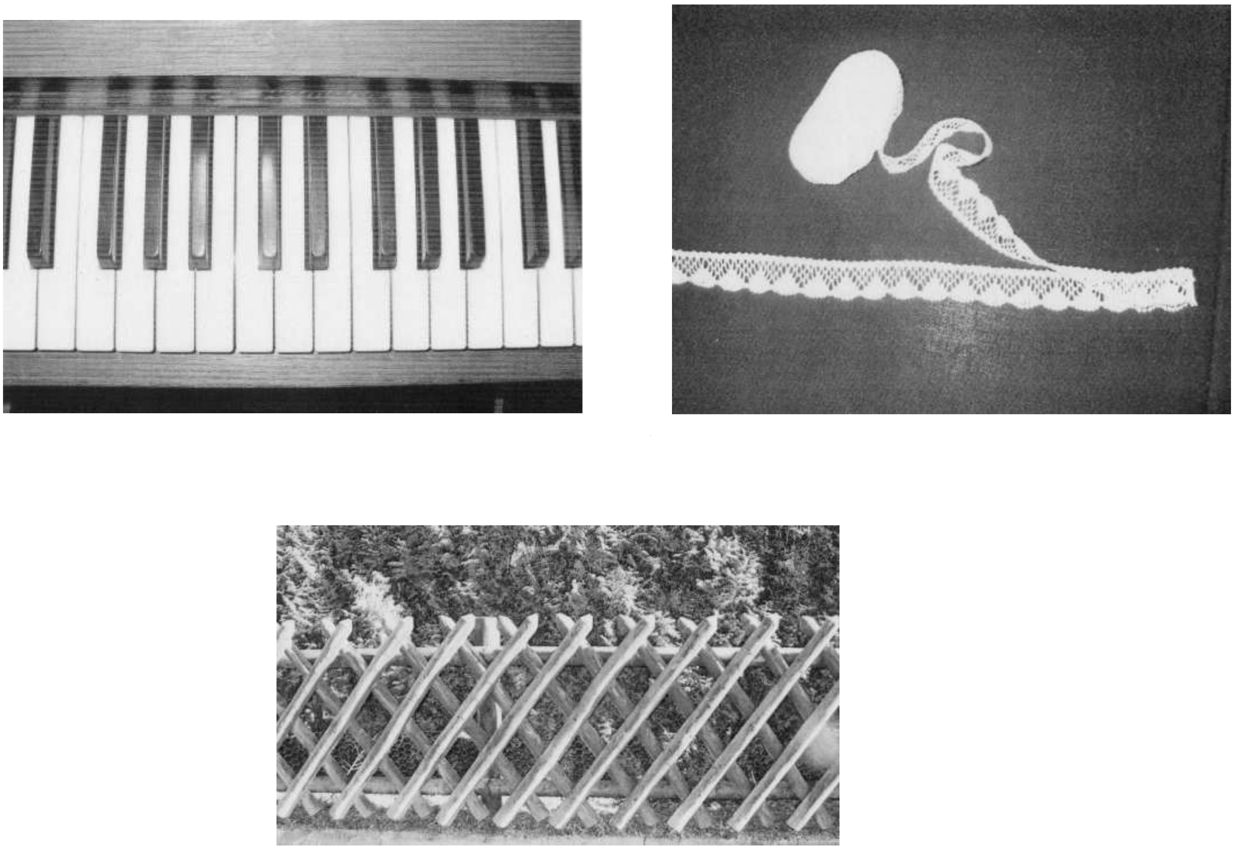

Abbildung 3. Alltägliche Friese